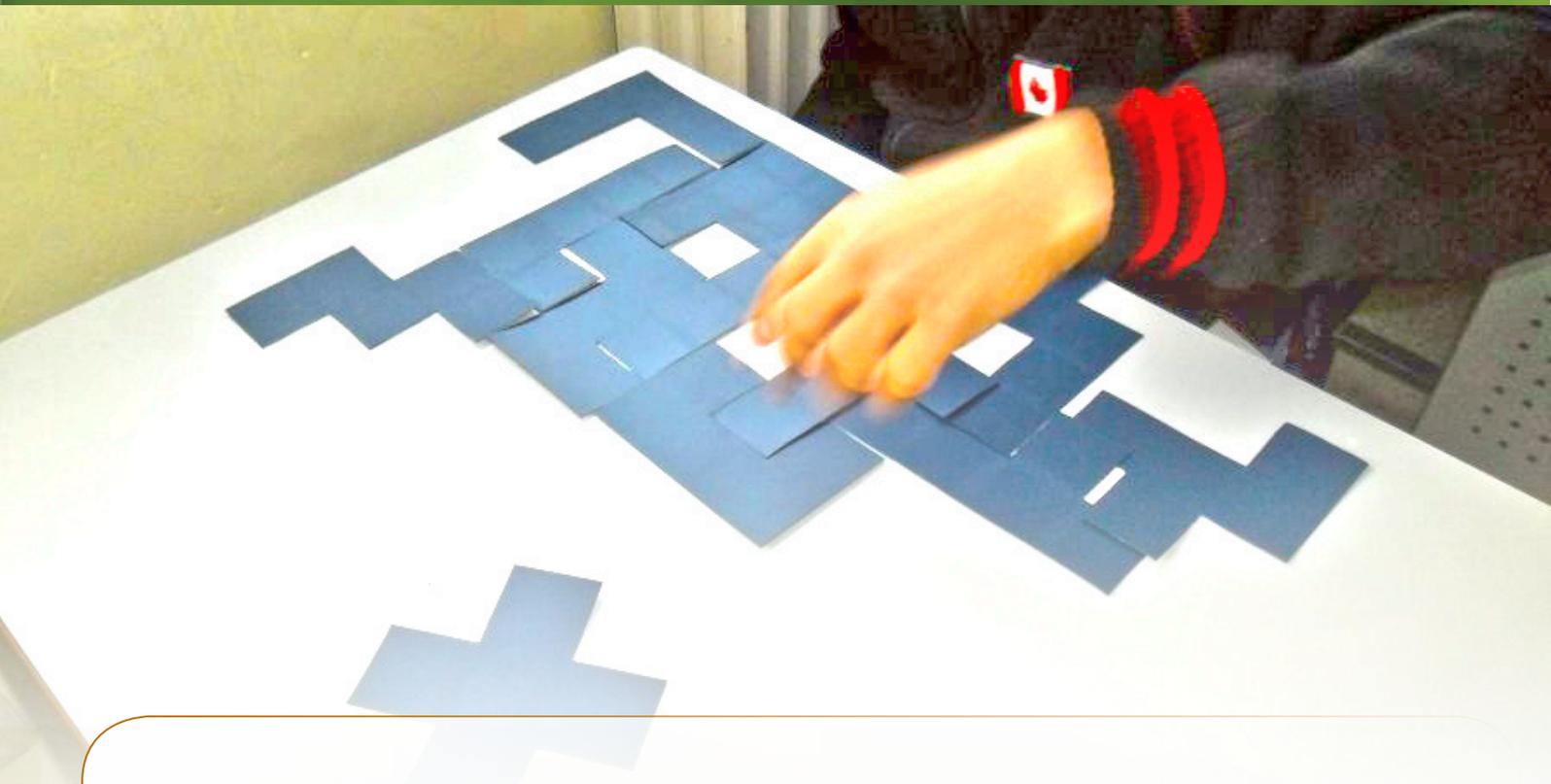


experiencias

experiencias educativas

■ ESO bachillerato



Utilización de actividades manipulativas con pentaminós para la enseñanza de la geometría

Ana María Alés Tirado

IES Jálama (Moraleja)

En este trabajo hemos estudiado tres conceptos fundamentales de geometría (área, perímetro y medida) que, según habíamos detectado, pueden dar lugar a posibles errores en nuestros alumnos a lo largo de los diferentes cursos de la Educación Secundaria. Además, hemos tratado de comprobar que, mediante ciertas actividades de carácter manipulativo, podemos llegar a solventar problemas tan comunes, y que les causan tantas dificultades, como la estimación de la medida de su clase.

Como otro aspecto importante de nuestro trabajo hemos realizado una recopilación de material sobre la definición, manejo, y utilización de los pentaminós en el aula, así como juegos que se pueden realizar con los mismos. Esto nos ha servido para plantear una serie de actividades manipulativas, a la que los alumnos de Educación Secundaria no están acostumbrados, y que pueden resultar útiles para afianzar los tres conceptos presentados anteriormente.

P Interés del problema de estudio

A largo de mi experiencia como profesora he constatado que en mis alumnos hay errores que vienen desde muy atrás, como es el caso de la medida de áreas y los perímetros, o el cálculo con unidades de medida convencionales. Por ejemplo, tienen dificultad para saber cuál es la distancia real entre dos ciudades cuando tienen delante un mapa con su escala, o no saben estimar cuál es la superficie del suelo de la clase donde se encuentran.

Uno de los temas importantes de la Matemática en la enseñanza obligatoria es el tema de la medida. Su estudio nunca ha sido puesto en duda por la importancia que se concede al mismo desde edades tempranas, y fundamentalmente por su relación con infinidad de situaciones problemáticas de nuestro entorno que favorecen su inserción en el currículo. Esta inclusión en el currículum tanto de Educación Primaria como de Educación Secundaria Obligatoria ha generado dos problemas que se describen a continuación.

En primer lugar, se ha tratado la geometría en un papel secundario que no se merece, olvidándonos de aspectos geométricos como capa-



cidad espacial, visualización, representaciones planas y, en definitiva, de ese paso continuo de situaciones 2D a 3D, y viceversa. En segundo lugar, resulta problemático el tratamiento metodológico dado a la medida, olvidándonos de la magnitud, creando las situaciones apropiadas que permitan por simple necesidad pasar de situaciones de magnitud a situaciones de medida o incluso dejando de lado unidades de medida no convencionales tan naturales como el folio o las baldosas para medir superficies [1].

Las líneas actuales en la enseñanza de las matemáticas pretenden formar matemáticamente a los alumnos de la educación obligatoria en aspectos que van a necesitar para su vida como ciudadanos. Parece que la finalidad es que predominen los problemas asociados a la realidad, tratando de evitar la complejidad del sistema de medida y la excesiva algebrización temprana del concepto que supone identificar el área con su cálculo aritmético. Se pretende fijar una unidad de referencia, comparar la cantidad medida y la unidad, expresarla por medio de un número y atender al significado de ese número [2].

Diferentes autores [3, 4, 5, 6] manifiestan que el material manipulativo facilita la comprensión y la comunicación porque permite referirse a un soporte físico, favorece la visualización, la motivación y la actitud positiva hacia la Matemática, convirtiéndose su uso en el punto de partida de la construcción del conocimiento. Es por ello que con esta experiencia intentamos analizar los problemas que tienen los alumnos en el tema de la medida de áreas y, utilizando un material concreto como son los pentaminós, ser capaz de afianzar conocimientos y evitar sus errores en un futuro [1].

Objetivo del trabajo

Sabemos que en nuestra tarea como docentes, una parte importante es, aprovechar situaciones espontáneas que se dan en clase y planificar otras que, siendo significativas e interesantes para nuestros alumnos/as, permitan desarrollar contenidos matemáticos relevantes. Condición esencial sería que estas situaciones supongan un auténtico desafío.

En el mundo real no basta con memorizar, hay que pensar y actuar. En matemáticas no se avanza mediante la repetición rutinaria de procedimientos aprendidos, y los docentes tenemos que tener mucho cuidado con la enseñanza de algoritmos y reglas matemáticas que, a veces, no son comprendidas por los alumnos/as.

En mis años de trabajo también he observado que los alumnos tienen un conocimiento muy pobre de conceptos básicos de geometría cuando llegan a Educación Secundaria, y además, ante situaciones muy sencillas de estimación de la medida de cualquier objeto que está su alrededor, se bloquean y no son capaces al menos de encontrar recursos útiles para hacer esa estimación, como puede ser utilizar la mano u objetos que sirvan para ese propósito.

Es por esto que esta experiencia tiene como objetivo principal:

Determinar si la utilización de los poliminós (y todas las posibles aplicaciones que ellos nos puedan facilitar (como cálculo de áreas, perímetros, puzles, juegos, etc.), como recursos educativos y materiales para el estudio y trabajo de la geometría, funcionan para corregir los errores que hemos detallado.

Consideraciones sobre la enseñanza de la geometría

En los últimos años, se ha puesto de manifiesto en todos los ámbitos educativos un gran interés por potenciar la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en la enseñanza obligatoria [7]. Así, la principal finalidad de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría es conectar a los alumnos con el mundo en el que se mueven, pues el conocimiento, la intuición y las relaciones geométricas resultan muy útiles en el desarrollo de la vida cotidiana.

En cuanto a las estrategias de estimación en medidas, debemos tener en cuenta que los alumnos necesitan la elección de un término de comparación o unidad de referencia y que establezcan una relación sensata entre la cantidad a estimar y la unidad [8].

Pentaminós

Consideramos que una forma de aprender geometría de manera fácil, y en la que los alumnos intervienen en su propio aprendizaje, puede ser con la utilización de materiales de tipo manipulativo, y más concretamente de los pentaminós, los cuales utilizaremos en nuestra experiencia didáctica.

La historia de los poliminós comenzó en 1954, cuando el matemático norteamericano Solomon W. Golomb publicó su artículo "Checker Board and Polyominoes" (Tableros de damas y poliminós) en *American Mathematician*. Posteriormente aparecieron diferentes actividades, que van desde simples recubrimientos, hasta la búsqueda de relaciones entre figuras o la comparación de áreas y perímetros. Pero es a partir de 1975, gracias a un artículo publicado en la *Scientific American*, donde consiguen gran popularidad y se desarrollan grandes aplicaciones matemáticas desde ese momento hasta nuestros días [6].

Existen numerosas definiciones para la palabra pentaminó, así podemos encontrar desde la más sencilla: "conjunto de cuadrados conectados por sus lados" [9], a aquella que nos ha parecido más importante para nuestra experiencia. La podemos encontrar en [1], y nos orienta además para la construcción posterior de los pentaminós:

"figuras cerradas formadas por cinco cuadrados cuya forma se puede comparar a las letras del alfabeto, por eso se nombran con una letra mayúscula"

En la Figura A1.1 se muestran las diferentes figuras del pentaminó. Estas son las figuras que deberán dibujar los alumnos, y que posteriormente les mostraremos para que les resulte sencillo memorizarlas y puedan utilizarlas sin miedo a confusión.

Metodología

Como ya se ha introducido anteriormente, para determinar si existen errores en el proceso de aprendizaje sobre algunos conceptos de

geometría (estimación de medidas, cálculo de longitudes, cálculo de áreas y perímetros), y si éstos perduran a lo largo de la etapa de secundaria, elaboraremos un cuestionario de respuesta abierta sobre los mismos. Este cuestionario será realizado por dos grupos de alumnos diferentes: un curso de 1º de ESO y otro de 2º de ESO.

Posteriormente, se trabajará con pentaminós solamente con uno de los grupos, el de 1º de ESO, plantearemos varias actividades orientadas a la manipulación de materiales, construcción de puzles y manejo de poliminós y después, se volverá a pasar un segundo cuestionario, de nuevo a los dos grupos, con el objetivo de analizar si hay o no mejoras en aquellos alumnos que han realizado las actividades manipulativas.

Explicamos a continuación el desarrollo de las diferentes actividades con pentaminós. Tras pasar el test inicial y explicar los conceptos de estimación de medidas, perímetro y área de diferentes figuras, dedicamos unas cinco sesiones de clase para la realización de las actividades con pentaminós.

Estas actividades proporcionan un aprendizaje significativo, ya que llevan implícita una estrategia para desarrollar el tipo de razonamiento. Por ello, nuestra metodología puede denominarse activa [9], ya que basa el proceso de enseñanza en varios aspectos significativos: la experimentación sobre los objetos de su entorno, el uso de materiales didácticos apropiados, las actividades de aula preparadas al efecto. Nuestra metodología se fija también en la actividad creadora del alumno y en sus propios descubrimientos [10].

1ª ACTIVIDAD.

Dibujo e identificación de todos los pentaminós.

Partiendo de la figura del dominó, los alumnos deben dibujar todas las figuras posibles formadas por tres cuadrados, cuatro cuadrados y cinco cuadrados unidos entre sí (triminós, tetraminós y pentaminós, respectivamente). El objetivo de esta actividad es dejar patente las

ANEXO 1 FIGURAS DE LOS PENTAMINÓS Y PUZLES

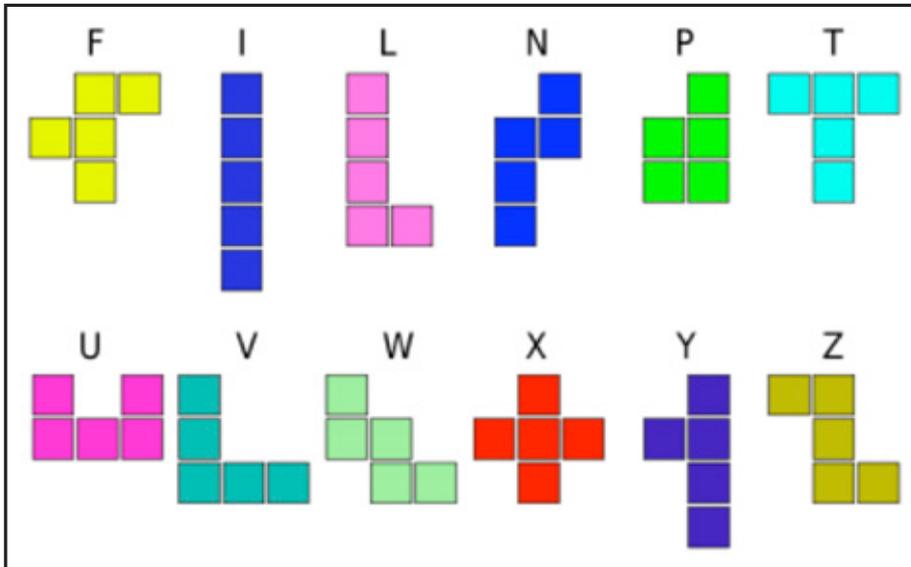


Figura 1 Piezas del pentaminó.

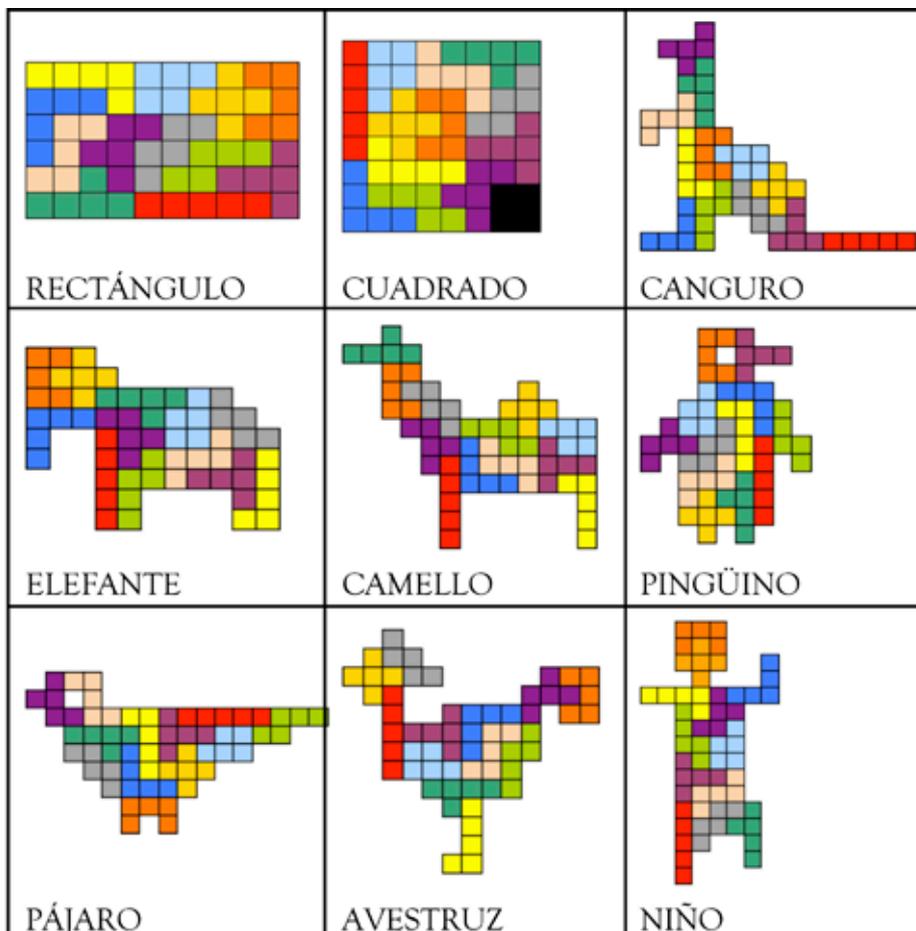


Figura 2 Puzles con pentaminós

dificultades que los alumnos tienen para darse cuenta de que algunas figuras son iguales por simetría, giro o transformación.

2ª ACTIVIDAD.

Cálculo del área y el perímetro de las piezas del pentaminó.

Los alumnos deben realizar el cálculo del área y del perímetro de todos los pentaminós. En este caso, conseguiremos que los alumnos reflexionen sobre los conceptos de área y perímetro, y que aprendan a utilizar el área o perímetro de elementos más sencillos (los cuadraditos, o los lados de los mismos) para el cálculo de área o perímetro de figuras compuestas por éstos.

3ª ACTIVIDAD.

Identificación y manejo de todos los pentaminós.

Esta actividad consta de varias fases. En principio, se planteará a los alumnos que dibujen todas aquellas figuras que recuerden de los pentaminós, para familiarizarse con ellas. Tras esto, se realizará una explicación, con figuras sencillas como cuadrados o rectángulos, sobre cómo calcular el área y el perímetro, conocidas las dimensiones de cuadraditos pequeños con los que se puede construir la figura completa.

Por último, se les entregan los juegos de pentaminós realizados con materiales como madera, espuma o plástico, con el fin de que se familiaricen con ellos e identifiquen cada pieza con los dibujos que han realizado. Particularmente, les pediremos que observen las simetrías, y que calculen el área y el perímetro de cada una de las figuras entregadas, utilizando ahora los conceptos explicados anteriormente, y sabiendo que la figura base (el cuadradito) es de 2 cm de lado y, por tanto, 4 cm² de área.

4ª ACTIVIDAD.

Construcción de figuras geométricas.

Posteriormente se entregarán los juegos de pentaminós a los alumnos para que construyan las figuras geométricas que sean capaces, con diferentes cantidades de piezas (desde un mínimo de 3 hasta el máximo de los 12 pentaminós).

5ª ACTIVIDAD.

Construcción de una figura creativa utilizando las piezas del pentaminó.

De manera similar a lo que se hizo en la cuarta actividad, se entrega a los alumnos los juegos de pentaminós para que construyan la figura creativa que se les ocurra. Tras un cierto tiempo, se les proporcionan figuras que se pueden construir con los pentaminós (Figura A1.2, aunque solamente el contorno, sin la solución), y se les pide que las construyan.

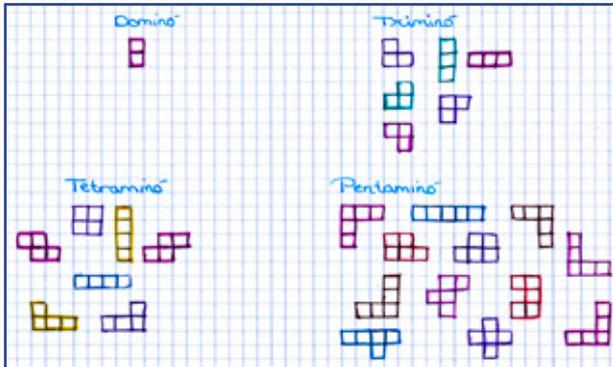
Resultados

Resulta interesante hacer un análisis general de los avances y dificultades que hemos detectado en nuestros alumnos tras la realización de las tres fases del trabajo, y que nos servirá para obtener las conclusiones de nuestra experiencia y proponer posibles mejoras en nuestra tarea como docentes.

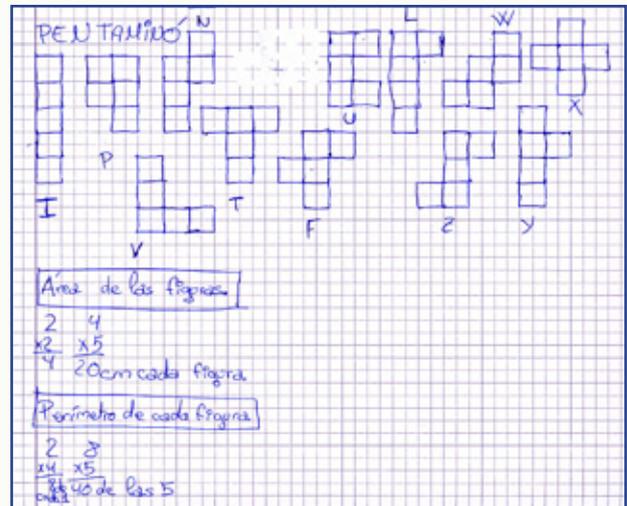
Los principales problemas que hemos detectado a la hora de resolver los test o realizar las actividades se pueden resumir en los siguientes puntos:

- ▶▶ Falta hábito de trabajo personal.
- ▶▶ Falta concentración: los alumnos son incapaces de estar centrados en una misma actividad más de 10 minutos.
- ▶▶ Necesitan buscar apoyo o ayuda del compañero, por tanto les falta autonomía personal y seguridad en sí mismos y en su capacidad de entendimiento.
- ▶▶ Tienen grandes dificultades de comprensión lectora y para entender mensajes orales sencillos.

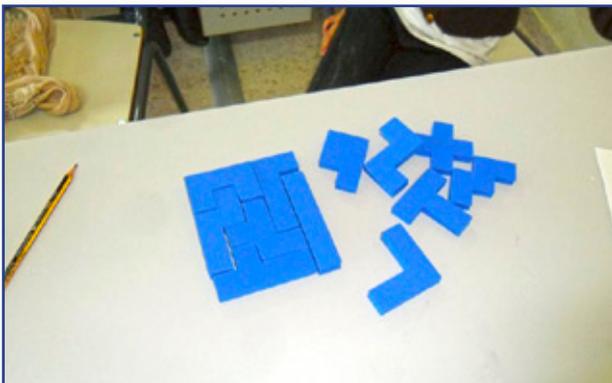
ANEXO 2 FIGURAS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES



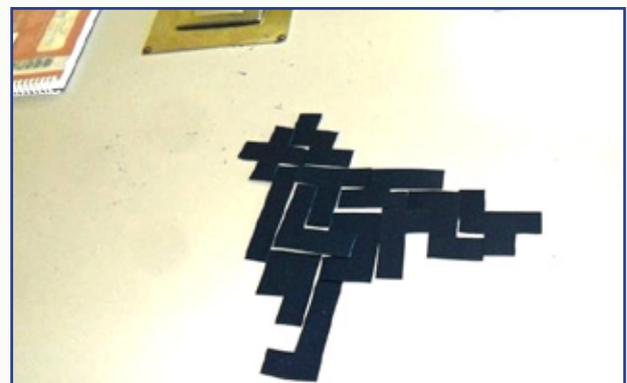
■ Figura A2.1: Dibujo realizado por un alumno en el que se observan errores.



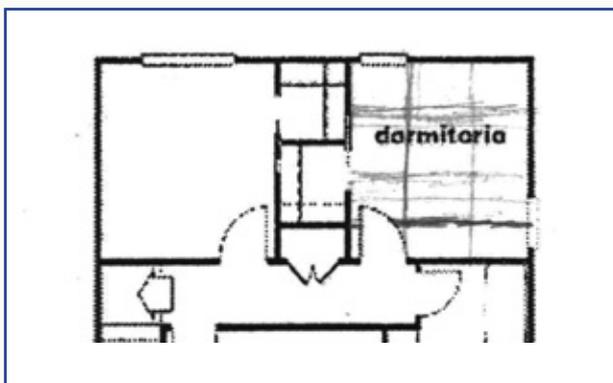
■ Figura A2.2: Cálculo erróneo del perímetro realizado por un alumno.



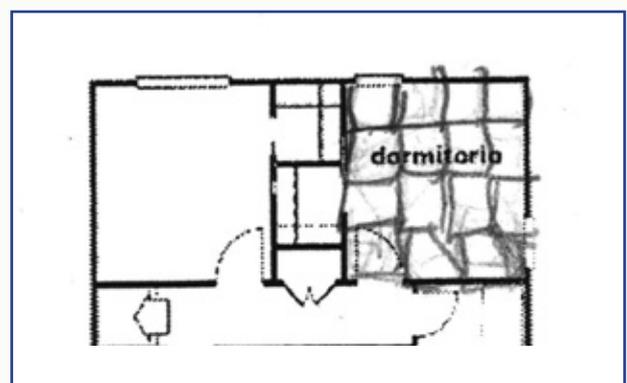
■ Figura A2.3: Construcción realizada por los alumnos con varias piezas del pentaminó.



■ Figura A2.4: Construcción creativa realizada por los alumnos con piezas del pentaminó.



■ Figura A2.5a: Ejemplo del uso de cuadrículas para calcular el área.



■ Figura A2.5b: Ejemplo del uso de cuadrículas para calcular el área.

► Cuando se trata de la asignatura de Matemáticas, falta razonamiento lógico y dicen lo primero que se les ocurre.

Los factores que acabamos de enumerar, explican en gran medida los resultados que se han obtenido, sobre todo en el test inicial. Tras el desarrollo de las actividades propuestas con pentaminós, los alumnos muestran mayor interés y concentración a la hora de enfrentarse al test final, consiguiendo así mejores resultados y además puede observarse en la tabla 1, en

dicha tabla se muestran los porcentajes de acierto obtenidos por los alumnos en los test inicial y final, agrupados por las tres categorías de análisis, recordamos que el grupo de 1º de ESO ha sido el que realizó las actividades con pentaminós.

Categorías	1º de ESO		2º de ESO	
	Test Inicial	Test Final	Test Inicial	Test Final
Estimación	32,3 %	65,3 %	40,5 %	57,6 %
Perímetro y área	25,0 %	64,3 %	50,0 %	48,4 %
Unidades	29,2 %	66,7 %	54,6 %	68,2 %

Tabla 1: Porcentaje de aciertos de los alumnos en las diferentes categorías

Como podemos ver en la tabla, para todas las categorías propuestas se consigue una mejora importante en los alumnos de 1º de Educación Secundaria (los que realizaron las actividades con pentaminós) mientras que los alumnos de 2º, aunque consiguen también mejorar, dicha mejora no es tan significativa. Podemos decir por tanto, que las actividades realizadas con pentaminós han permitido a los alumnos adquirir mejor los conceptos analizados.

Además queremos destacar las observaciones registradas durante las sesiones de actividades con pentaminós, de forma general, podemos comentar que la mayor parte de los alumnos mostraron siempre una actitud muy positiva durante la realización de dichas actividades, sobre todo en las realizadas físicamente con pentaminós.

Durante la primera actividad, nos dimos cuenta que los alumnos tienen dificultades para

identificar que dos figuras son la misma aunque estén giradas o invertidas, como podemos observar en la figura A2.1 y en las figuras A3.11 a A3.14, que representan los poliminós dibujados por varios de los alumnos. También se observó que un cierto número de alumnos se cansaron y se desanimaron al no conseguir, en poco tiempo, encontrar figuras diferentes.

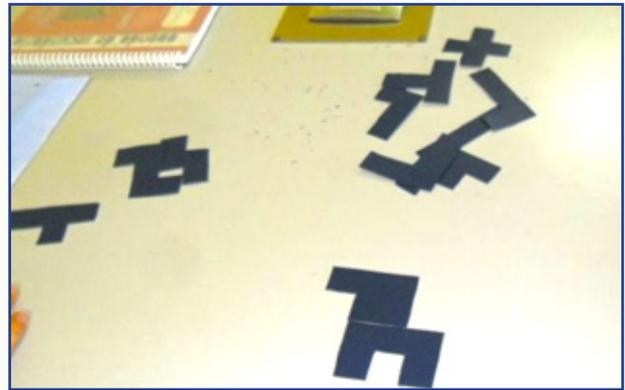
En el desarrollo de la segunda actividad se observó claramente que los alumnos confunden área con perímetro, solamente dos alumnas del grupo tienen claro que lo más eficiente es calcular primero el área de un cuadrado y luego multiplicar por cinco, en cuanto al perímetro tienen mayores dificultades como se observa en la figuras A2.2 y A3.10.

En las siguientes actividades (3ª, 4ª y 5ª) se les entregaron los juegos de pentaminós realizados con madera, espuma o plástico con el objetivo de que se familiarizaran con ellos, e identificaran las piezas con sus dibujos. Al terminar la clase, en la tercera actividad, aunque ninguno de los alumnos fue capaz de resolver el rectángulo

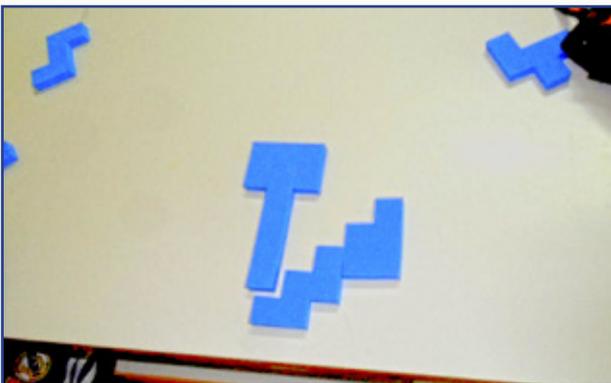
ANEXO 3 FIGURAS Y FOTOS DE TRABAJOS DE LOS ALUMNOS



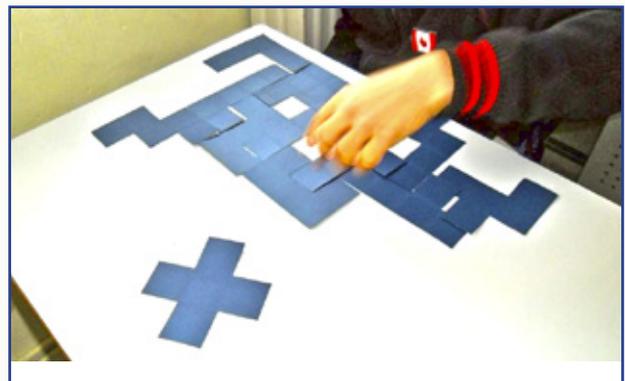
■ A3.1 Alumnos trabajando en el aula durante la realización de las actividades con pentaminós.



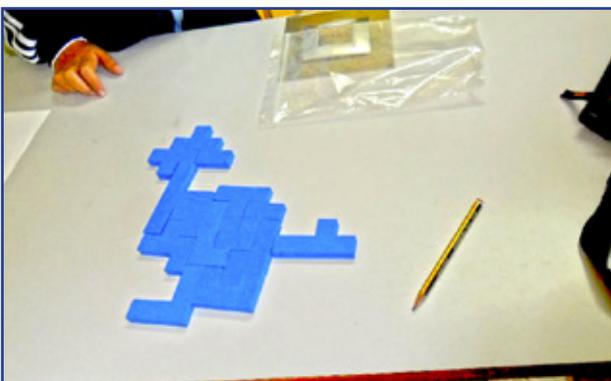
■ Figura A3.2 Construcción de una figura creativa.



■ Figura A3.3. Construcción de figura creativa.



■ Figura A3.4. Alumno trabajando en la construcción del rectángulo con todas las piezas.



■ Figura A3.5. Figura creativa.



■ Figura A3.6. Construcción de figuras geométricas.

completo (con todas las piezas del pentaminó), nos resultó curioso que precisamente los alumnos más inquietos y revoltosos en las clases fueron los que se mostraron más animados e interesados en terminarlo, aunque fuera en otro momento, para lo cual incluso nos lo pidieron para terminar de hacerlo en casa o al día siguiente. Y en la 5ª actividad, donde tenían que construir figuras de manera libre, tratando de representar algún objeto conocido, la actividad fue muy motivadora y creativa a la vez como se observa en las figuras A2.3 y A2.4, y los alumnos se encontraron distendidos, aunque sin mostrar demasiado revuelo.

Conclusiones

Presentamos a continuación las conclusiones que consideramos más relevantes de nuestra experiencia, recordando nuestro objetivo planteado al principio de esta experiencia y tras el análisis de los test inicial y final, podemos afirmar que se ha conseguido nuestro objetivo, ya que durante la realización del test inicial se detectaron frecuentes confusiones entre área y perímetro de las figuras, y además mostraron bastantes problemas a la hora de la estimación de medida de objetos cotidianos. Sin embargo, tras la explicación de la unidad didáctica y el trabajo manipulativo con pentaminós, los resultados en el test final fueron bastante mejores, con mayores tasas de respuesta de las preguntas y de éxito en las respuestas. Particularmente, nos ha llamado la atención cómo ha mejorado la capacidad de ciertos alumnos para calcular áreas de figuras geométricas, habiendo sido capaces de utilizar un método bastante elaborado, el de cuadrillar las figuras o convertirlas en otras más sencillas como se observa en la figura A2.5, para realizar los cálculos en una de las preguntas del test final.

Por otro lado, pensamos que el trabajo manipulativo les ha ayudado a perder el miedo ante los conceptos de la geometría con los que se ha trabajado, ya que el gran número de

alumnos que no contestan en el test inicial, se reduce bastante en el test final, mostrando que los alumnos poseen una mayor seguridad en sí mismos, aunque finalmente se equivoquen.

Implicaciones

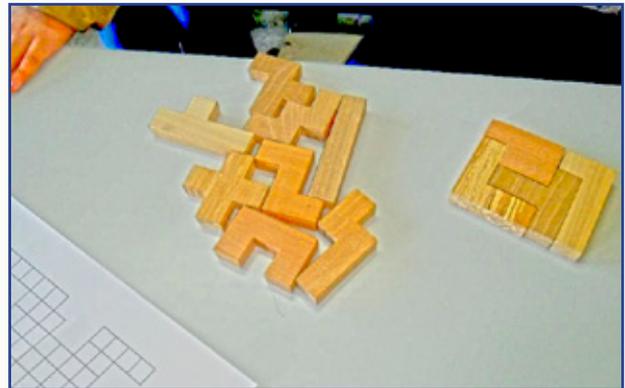
Como indicamos al principio, una de las intenciones de este trabajo era poder ser útil a otros profesores en el desarrollo de este tema. Teniendo en cuenta la evolución positiva de los alumnos que se ha observado a lo largo de la experiencia, tanto en los resultados como en la disposición de los mismos, creemos que este estudio puede contribuir a posteriores estudios sobre la mejora en la enseñanza de la geometría, no tanto desde un punto de vista formal sino desde un punto de vista más bien lúdico.

Por último, estamos convencidos que este estudio puede contribuir a que otros docentes planifiquen sus clases de una forma menos tradicional. Es un hecho que en Educación Secundaria se olvidan los trabajos manipulativos, y en ocasiones pueden reforzar o cambiar conceptos y aprendizajes en nuestros alumnos. ■

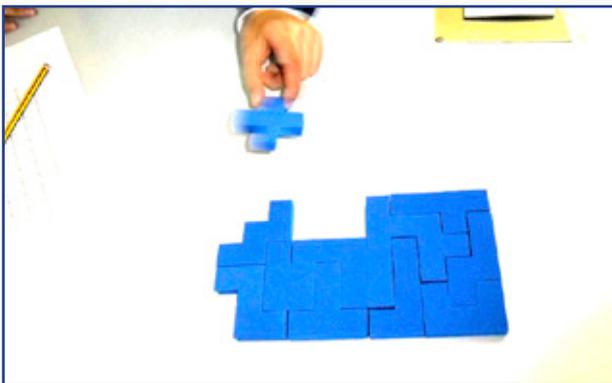
ANEXO 3 FIGURAS Y FOTOS DE TRABAJOS DE LOS ALUMNOS



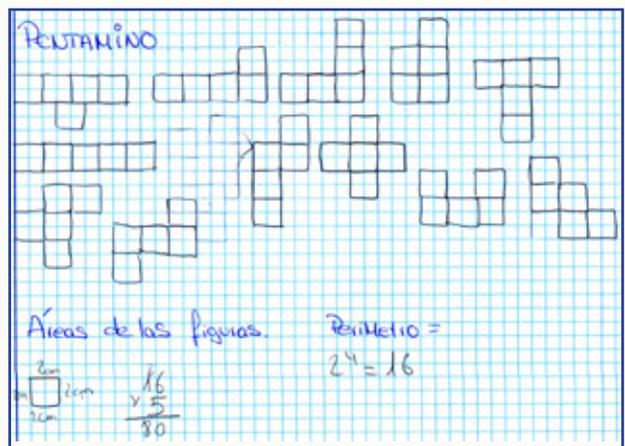
■ Figura A3.7. Figura creativa.



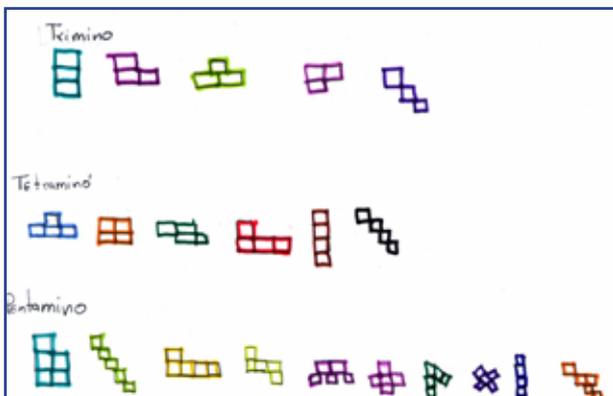
■ Figura A3.8. Figura geométrica.



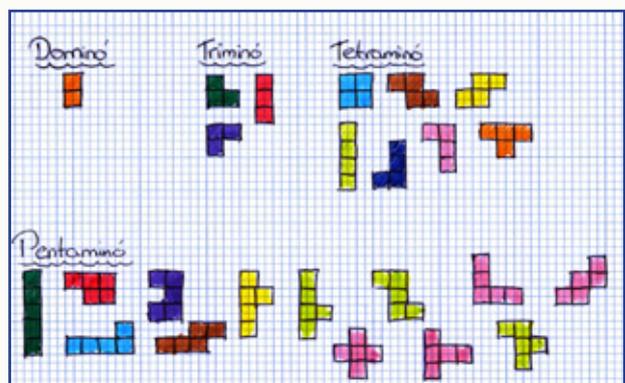
■ Figura A3.9. Figura geométrica sin concluir.



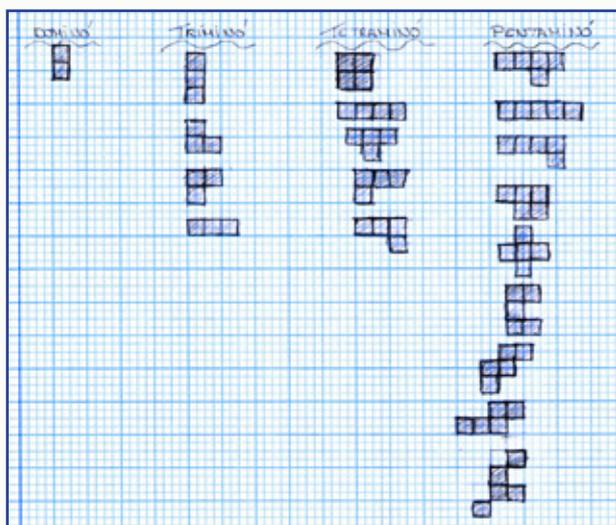
■ Figura A3.10. Trabajo de dibujo de las diferentes piezas de los pentaminós.



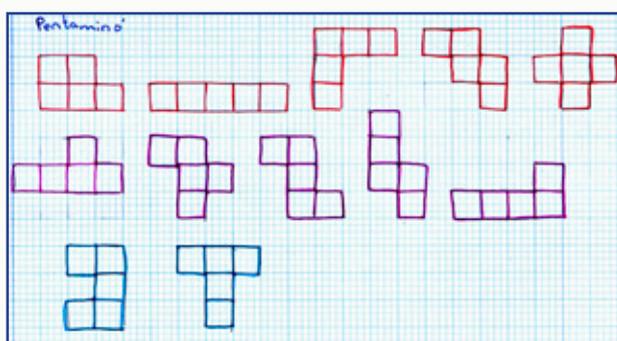
■ Figura A3.11. Trabajo de dibujo de las diferentes piezas de los pentaminós.



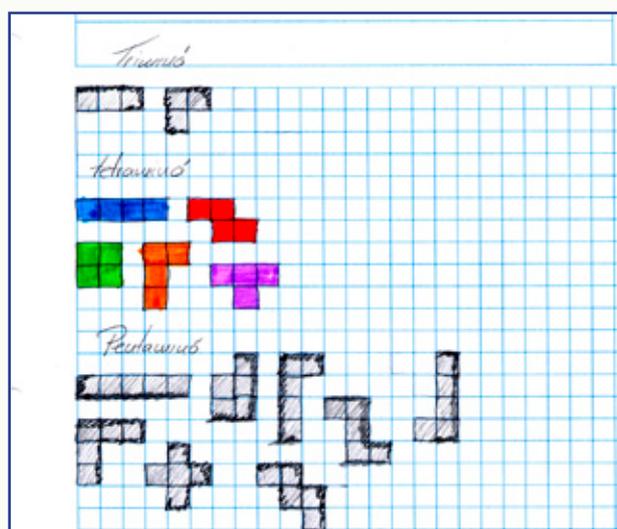
■ Figura A3.12. Trabajo de dibujo de las diferentes piezas de los pentaminós.



■ Figura A3.13. Trabajo de dibujo.



■ Figura A3.14. Trabajo de dibujo.



■ Figura A3.15. Trabajo de dibujo.

Bibliografía

- [1] ARRIETA, M. (2003) Los pentominós y la superficie. Un modelo de actividad basado en Dienes para el primer ciclo de Secundaria. Sigma, Abril, 35-42.
- [2] FLORES, P. (2002). Guías praxis para el profesorado de ESO. Matemáticas, Contenidos, Actividades y Recursos. "Superficie y área" Madrid: CISS PRAXIS EDUCACIÓN.
- [3] FERNÁNDEZ-ALISEDA, A., HANS, J. A. y MUÑOZ, J. (2000). Bricolaje matemático: Una alternativa en la búsqueda de recursos didácticos. Epsilon 46-47 Vol. 16 (1-2), 61-70.
- [4] FERNÁNDEZ-ALISEDA, A., HANS, J. A. y MUÑOZ, J. (2004). Geometría entretenida. Epsilon 60 Vol. 20 (3), 61-70.
- [5] RUIZ DE ELVIRA, A., BLANCO, M. y CORCHETE, A. (1998). Taller de matemáticas. Mérida: Consejería de Educación y Juventud.
- [6] SANCHEZ PESQUERO, C. y CASAS GARCÍA, L. M. (1998). Juegos y materiales manipulativos como dinamizadores del aprendizaje en matemáticas. Madrid: MEC.
- [7] BARRANTES, M. (2003). Caracterización de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en Primaria y Secundaria. Campo abierto 24, 15-36.
- [8] SEGOVIA, I., CASTRO, E., CASTRO EN. y RICO, L. (1989). Estimación en cálculo y medida. Madrid: Síntesis.
- [9] JURAIDO, M. (1983). Pentominós: el rompecabezas interminable. Cacumen, 11, 31-32.
- [10] ANTÓN, J. L., GONZÁLEZ, F., GONZÁLEZ GARCÍA, C., LLORENTE, J., MONTAMARTA, G., RODRIGUEZ, J. A. y RUIZ, Mª J. (1994). Taller de matemáticas. Madrid: Narcea.